

LE DISEQUAZIONI

Premessa.

Ci sono problemi, alcuni appartenenti anche alla vita quotidiana, che possono essere risolti attraverso una disequazione, ossia un'espressione algebrica formata da due membri, contenenti un'incognita, ad esempio la variabile x , e legati tra loro da uno dei simboli di disequaglianza, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, che, a loro volta, stanno ad indicare il senso o verso della disequazione.

In questa sezione, pertanto, ci si occuperà dello studio delle disequazioni, partendo dal concetto di disequaglianza tra numeri relativi e ponendo l'attenzione, in particolar modo, sui seguenti argomenti:

- 1) Definizione di retta orientata e principali proprietà delle disequaglianze
- 2) Concetto di intervallo
- 3) Disequazioni razionali intere di primo grado
- 4) Disequazioni razionali intere di secondo grado
- 5) Disequazioni frazionarie
- 6) Sistemi di disequazioni
- 7) Disequazioni irrazionali

La retta orientata, come il piano cartesiano, è uno strumento molto utile per la rappresentazione grafica di certe situazioni matematiche. verrà utilizzata ora per rappresentare disequaglianze tra numeri reali ed introdurre nozioni che si riveleranno necessarie nel seguito.

Siano a e b due numeri reali qualsiasi con $a \neq b$ (a diverso da b). Come è ben noto, essi rappresentano le ascisse di due punti A e B di una retta orientata. Ad un punto X qualsiasi, compreso tra A e B , corrisponderà quindi un numero reale x compreso tra l'ascissa a del punto A e l'ascissa b del punto B , come riportato nella seguente figura:



Il numero reale x varia allora nell'insieme dei numeri reali compresi tra a e b , ovvero nell'intervallo di estremi a e b .

Risulta ora necessario, prima di proseguire, fare alcune considerazioni riguardo l'intervallo sopra costruito. Può infatti risultare:

1) $a < x < b$

cioè l'insieme dei numeri reali in cui la x varia è rappresentato, sulla retta orientata, dall'intervallo aperto di estremi a e b . Gli estremi, quindi, non appartengono all'intervallo considerato. In simboli si scriverà:

$$]a, b[$$

cioè gli estremi dell'intervallo vengono scritti tra parentesi quadre aperte verso l'esterno:



N.B.: Si osservi che con il “cerchietto vuoto” nei punti a e b , estremi dell'intervallo, si intende che gli estremi non appartengono all'intervallo considerato.

2) $a \leq x \leq b$

cioè l'insieme dei numeri reali in cui la x varia è rappresentato, sulla retta orientata, dall'intervallo chiuso di estremi a e b . Gli estremi, quindi, appartengono all'intervallo considerato. In simboli si scriverà:

$$[a, b]$$

cioè gli estremi dell'intervallo vengono scritti tra parentesi quadre:



N.B.: Si osservi che con il “cerchietto pieno” nei punti a e b , estremi dell'intervallo, si intende che gli estremi appartengono all'intervallo considerato.

3) $a \leq x < b$

cioè l'insieme dei numeri reali in cui la x varia è rappresentato, sulla retta orientata, dall'intervallo semichiuso di estremi a e b . Dei due estremi, quindi, solo a appartiene all'intervallo considerato. In simboli si scriverà:

$$[a, b[$$

cioè l'intervallo è chiuso a sinistra ed aperto a destra:



4) $a < x \leq b$

cioè l'insieme dei numeri reali in cui x varia è rappresentato, sulla retta orientata, dall'intervallo semichiuso di estremi a e b . Dei due estremi, quindi, solo a appartiene all'intervallo considerato. In simboli si scriverà:
 $]a, b]$

cioè l'intervallo è chiuso a destra ed aperto a sinistra:



Si osservi che tutti fino ad ora si è parlato esclusivamente di intervalli limitati.

Sulla retta orientata, però, risulta sempre possibile definire anche intervalli illimitati a partire da un qualsiasi punto A , di ascissa a , ed estendendosi verso destra o verso sinistra indefinitamente. Nel primo caso si parlerà di infinito positivo $(+\infty)$ e nel secondo caso di infinito negativo $(-\infty)$. Si tenga presente che i simboli $+\infty$ e $-\infty$ sono puramente convenzionali, cioè utili per sintetizzare il discorso, ma in realtà ad essi non corrisponde alcun valore numerico. Anche in questo caso, però, occorre fare delle considerazioni. Infatti, considerato sulla retta orientata un punto A , di ascissa a , allora un altro punto X , di ascissa x , potrà cadere a destra o a sinistra del punto A . Può quindi risultare:

1) $x > a$

cioè l'insieme dei numeri reali in cui la x varia è rappresentato, sulla retta orientata, dall'intervallo aperto $]a, +\infty[$ perché a non appartiene all'intervallo:



2) $x \geq a$

cioè l'insieme dei numeri reali in cui la x varia è rappresentato, sulla retta orientata, dall'intervallo semichiuso $[a, +\infty[$ perché a appartiene all'intervallo (l'intervallo è chiuso a sinistra):



3) $x < a$

cioè l'insieme dei numeri reali in cui la x varia è rappresentato, sulla retta orientata, dall'intervallo aperto $]-\infty, a[$ perché a non appartiene all'intervallo:



4) $x \leq a$

cioè l'insieme dei numeri reali in cui la x varia è rappresentato, sulla retta orientata, dall'intervallo semichiuso $]-\infty, a]$ perché a appartiene all'intervallo (l'intervallo è chiuso a destra):



Dopo questa breve parentesi introduttiva verranno ora richiamati alcuni concetti fondamentali sulle disequazioni.

Dati due numeri a e b reali qualsiasi con $a \neq b$, si scriverà $a < b$ (a minore di b) oppure $a > b$ (a maggiore di b) a seconda che sia rispettivamente $a - b < 0$ oppure $a - b > 0$ e viceversa.

Proprietà delle disequazioni.

1) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

$\forall$ (per ogni) $a, b, c \in \mathbb{R}$

Esempio.

Si consideri $a = 3, b = 2$, cioè $a > b$ e sia $c = 4 > 0$. Allora risulta:

$$a + c = 3 + 4 = 7 > b + c = 2 + 4 = 6$$

Analogamente, se $a = 3, b = 2$, cioè $a > b$, ma $c = -4 < 0$, allora si ha:

$$a + c = 3 + (-4) = -1 > b + c = 2 + (-4) = -2$$

$$1') a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

$\forall$ (per ogni) $a, b, c \in \mathbb{R}$

Esempio.

Si consideri $a = 2, b = 3$, cioè $a < b$ e sia $c = 4 > 0$. Allora risulta:

$$a + c = 2 + 4 = 6 < b + c = 3 + 4 = 7$$

Analogamente, se $a = 2, b = 3$, cioè $a < b$, ma $c = -4 < 0$, allora si ha:

$$a + c = 2 + (-4) = -2 < b + c = 3 + (-4) = -1$$

$$2) a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$$

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Esempio.

Si consideri $a = 3, b = 2, c = 2, d = 1$, cioè $a > b$ e $c > d$. Allora risulta:

$$a + c = 3 + 2 = 5 > b + d = 2 + 1 = 3$$

Analogamente, se $a = -2, b = -3, c = 2, d = 1$, cioè $a > b$ e $c > d$, allora si ha:

$$a + c = -2 + 2 = 0 > b + c = -3 + 1 = -2$$

N.B.: Si osservi che, in generale, non è lecito sottrarre membro a membro due disequaglianze.

$$2') a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d$$

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Esempio.

Si consideri $a = 2, b = 3, c = 1, d = 2$, cioè $a < b$ e $c < d$. Allora risulta:

$$a + c = 2 + 1 = 3 < b + d = 3 + 2 = 5$$

Analogamente, se $a = -3, b = -2, c = 1, d = 2$, cioè $a < b$ e $c < d$, allora si ha:

$$a + c = -3 + 1 = -2 < b + c = -2 + 2 = 0$$

$$3) a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \quad (c \neq 0)$$

$\forall$ (per ogni) $a, b, c \in \mathbb{R}$

Esempio.

Si consideri $a = 3, b = 2$, cioè $a > b$, e sia $c = 2 > 0$. Allora risulta:

$$ac = 3(2) = 6 > bc = 2(2) = 4 \text{ e } \frac{a}{c} = \frac{3}{2} = 1,5 > \frac{b}{c} = \frac{2}{2} = 1$$

Analogamente, se $a = 2, b = -3$, cioè $a > b$, e $c = 2 > 0$, allora si ha:

$$ac = 2(2) = 4 > bc = (-3)2 = -6 \text{ e } \frac{a}{c} = \frac{2}{2} = 1 > \frac{b}{c} = \frac{-3}{2} = -1,5$$

$$3') a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \quad (c \neq 0)$$

$\forall$ (per ogni) $a, b, c \in \mathbb{R}$

Esempio.

Si consideri $a = 2, b = 3$, cioè $a < b$, e sia $c = 2 > 0$. Allora risulta:

$$ac = 2(2) = 4 < bc = 3(2) = 6 \text{ e } \frac{a}{c} = \frac{2}{2} = 1 < \frac{b}{c} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Analogamente, se $a = -3, b = 2$, cioè $a < b$, e $c = 2 > 0$, allora si ha:

$$ac = (-3)2 = -6 < bc = 2(2) = 4 \text{ e } \frac{a}{c} = \frac{-3}{2} = -1,5 < \frac{b}{c} = \frac{2}{2} = 1$$

$$4) a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$$

$\forall$ (per ogni) $a, b, c \in \mathbb{R}$

Esempio.

Si consideri $a = 3, b = 2$, cioè $a > b$, e sia $c = -2 < 0$. Allora risulta:

$$ac = 3(-2) = -6 < bc = 2(-2) = -4 \text{ e } \frac{a}{c} = \frac{3}{-2} = -1,5 < \frac{b}{c} = \frac{2}{-2} = -1$$

Analogamente, se $a = 2, b = -3$, cioè $a > b$, e $c = -2 < 0$, allora si ha:

$$ac = 2(-2) = -4 < bc = (-3)(-2) = +6 \text{ e } \frac{a}{c} = \frac{2}{-2} = -1 < \frac{b}{c} = \frac{-3}{-2} = 1,5$$

4') $a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc$

$\forall$ (per ogni) $a, b, c \in \mathbb{R}$

Esempio.

Si consideri $a = 2, b = 3$, cioè $a < b$, e sia $c = -2 < 0$. Allora risulta:

$$ac = 2(-2) = -4 > bc = 3(-2) = -6 \text{ e } \frac{a}{c} = -\frac{2}{2} = -1 > \frac{b}{c} = -\frac{3}{2} = -1,5$$

Analogamente, se $a = -3, b = 2$, cioè $a < b$, e $c = -2 < 0$, allora si ha:

$$ac = (-3)(-2) = +6 > bc = 2(-2) = -4 \text{ e } \frac{a}{c} = \frac{3}{2} = 1,5 > \frac{b}{c} = -\frac{2}{2} = -1$$

N.B.: In particolare, cambiando il *segno* ad ambo i membri della disuguaglianza, ovvero moltiplicando entrambi i membri per -1 , bisogna cambiare anche il *senso* (o *verso*) della disuguaglianza.

5) $a, b, c, d > 0, a > b, c > d \Rightarrow ac > bd$

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Esempio.

Si consideri $a = 3 > 0, b = 2 > 0, c = 2 > 0, d = 1 > 0$, cioè $a > b$ e $c > d$. Allora risulta:

$$ac = 3(2) = 6 > bd = 2(1) = 2$$

5') $a, b, c, d > 0, a < b, c < d \Rightarrow ac < bd$

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Esempio.

Si consideri $a = 2 > 0, b = 3 > 0, c = 1 > 0, d = 2 > 0$, cioè $a < b$ e $c < d$. Allora risulta:

$$ac = 2(1) = 2 < bd = 2(2) = 4$$

6) $a, b > 0$ oppure $a, b < 0 \Rightarrow \begin{cases} a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \\ a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \end{cases}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$

Esempi.

1) $a, b > 0$

Si consideri $a = 3, b = 2$, cioè $a > b$. Allora risulta:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{3} \approx 0,3 < \frac{1}{b} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Se, invece, si prende $a = 2, b = 3$, cioè $a < b$, allora si ha:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2} = 0,5 > \frac{1}{b} = \frac{1}{3} \approx 0,3$$

2) $a, b < 0$

Si consideri $a = -2, b = -3$, cioè $a > b$. Allora risulta:

$$\frac{1}{a} = -\frac{1}{2} = -0,5 < \frac{1}{b} = -\frac{1}{3} \approx -0,3$$

Se, invece, si prende $a = -3, b = -2$, cioè $a < b$, allora si ha:

$$\frac{1}{a} = -\frac{1}{3} \approx -0,3 > \frac{1}{b} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

7) $a, b > 0, n > 0, a > b \Rightarrow a^n > b^n$

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

e viceversa.

Esempio.

Si consideri $a = 3, b = 2$, cioè $a > b$ ed $a, b > 0$, e sia $n = 2 > 0$. Allora risulta:

$$a^n = (3)^2 = 9 > b^n = (2)^2 = 4$$

7') $a, b > 0, n > 0, a < b \Rightarrow a^n < b^n$

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

e viceversa.

Esempio.

Si consideri $a = 2, b = 3$, cioè $a < b$ ed $a, b > 0$, e sia $n = 2 > 0$. Allora risulta:

$$a^n = (2)^2 = 4 < b^n = (3)^2 = 9$$

$$8) a, b < 0, a > b, n > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n > b^n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ a^n < b^n & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Esempio.

Si consideri $a = -2, b = -3$, cioè $a > b$ ed $a, b < 0$. Allora risulta:

$$\begin{cases} a^3 = (-2)^3 = -8 > b^3 = (-3)^3 = -27 & \text{se } n = 3 \text{ dispari} \\ a^2 = (-2)^2 = +4 < b^2 = (-3)^2 = +9 & \text{se } n = 2 \text{ pari} \end{cases}$$

N.B.: Si osservi che, in generale, da $a > b$ segue $-a < -b$, così come da $a < b$ segue $-a > -b$, (ad esempio, $2 < 3 \Rightarrow -2 > -3$, così come $3 > 2 \Rightarrow -3 < -2$).

$$8') a, b < 0, a < b, n > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n < b^n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ a^n > b^n & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Esempio.

Si consideri $a = -3, b = -2$, cioè $a < b$ ed $a, b < 0$. Allora risulta:

$$\begin{cases} a^3 = (-3)^3 = -27 < b^3 = (-2)^3 = -8 & \text{se } n = 3 \text{ dispari} \\ a^2 = (-3)^2 = +9 > b^2 = (-2)^2 = +4 & \text{se } n = 2 \text{ pari} \end{cases}$$

$$9) m, n > 0, m > n, a > 0, a \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} a^m > b^n & \text{se } a > 1, a > b \\ a^m < b^n & \text{se } a < 1, a < b \end{cases} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

e viceversa.

Esempio.

Si consideri:

- $a = +3 > 0, b = +2$, cioè $a = 3 > 1$, ed anche $m = 3 > 0, n = 2 > 0$, cioè $m > n$;
- $a = \frac{1}{3} > 0, b = \frac{1}{2} > 0$, cioè $a = \frac{1}{3} < 1$, ed anche $m = 3 > 0, n = 2 > 0$, cioè $m > n$.

Allora risulta:

$$\begin{cases} a^3 = (+3)^3 = +27 > b^2 = (+2)^2 = +4 & \text{se } a = 3 > 1, a = 3 > b = 2 \\ a^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} < b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} & \text{se } a = \frac{1}{3} < 1, a = \frac{1}{3} < b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$9') m, n > 0, m > n, a > 0, a \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} a^m < b^n & \text{se } a > 1, a < b \\ a^m > b^n & \text{se } a < 1, a > b \end{cases} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

e viceversa.

Esempio.

Si consideri:

- $a = +2 > 0, b = +3$, cioè $a = 2 > 1$, ed anche $m = 3 > 0, n = 2 > 0$, cioè $m > n$;
- $a = \frac{1}{2} > 0, b = \frac{1}{3} > 0$, cioè $a = \frac{1}{2} < 1$, ed anche $m = 3 > 0, n = 2 > 0$, cioè $m > n$.

Allora risulta:

$$\begin{cases} a^3 = (+2)^3 = +8 < b^2 = (+3)^2 = +9 & \text{se } a = 2 > 1, a = 2 < b = 3 \\ a^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} > b^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} & \text{se } a = \frac{1}{2} < 1, a = \frac{1}{2} < b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

N.B.: Si osservi che la 9') può essere inglobata nella 9), invertendo la sequenza delle disuguaglianze del sistema.

DISEQUAZIONI RAZIONALI INTERE DI PRIMO GRADO.

Nel presente paragrafo ci si occuperà della risoluzione delle disequazioni lineari (ossia di primo grado) in un'incognita, riconducibili ad una delle seguenti forme:

$$ax + b > 0 \quad \text{oppure} \quad ax + b < 0$$

Si osservi, inoltre, che è sempre possibile supporre $a > 0$, cioè il coefficiente della x sempre positivo; in caso contrario, infatti, è possibile moltiplicare ambo i membri della disequazione per -1 , ovvero cambiare di segno ad ambo i membri, ricordandosi di cambiare anche il senso della disequazione, così da ricondursi ad una delle due forme sopra riportate: in tal caso si dirà che la disequazione è ridotta a forma normale.

Dunque ogni disequazione razionale intera, di primo grado e non, si può sempre trasformare nella forma normale $N(x) > 0$ trasportando tutti i termini in un medesimo membro e riducendo i termini simili. Il grado del polinomio $N(x)$ ottenuto è proprio il grado della disequazione.

Esempio.

Si consideri la disequazione:

$$(*) \quad 50x^2 - 60 + 15x^2 - 45x + 15 > 90x + 6x^2 - 6$$

Trasportando tutti i termini al primo membro si ha:

$$50x^2 - 60 + 15x^2 - 45x + 15 - 90x - 6x^2 + 6 > 0$$

da cui riducendo i termini simili:

$$59x^2 - 135x - 39 > 0$$

che rappresenta proprio la forma normale della disequazione considerata. Ne segue che la (*) ha grado pari a 2.

Si chiama soluzione della disequazione quel valore che, attribuito alla variabile x , soddisfa la disequazione data. In altre parole risolvere una disequazione significa trovare tutte le sue possibili soluzioni.

Il polinomio che figura a sinistra del simbolo di disequazione prende il nome di primo membro, mentre quello che figura a destra di tale simbolo è detto secondo membro.

Risulta allora:

$$(1) \quad ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$$

$$(2) \quad ax + b < 0 \Rightarrow ax < -b \Rightarrow x < -\frac{b}{a}$$

Dunque, la (1) è soddisfatta per tutti i valori della x maggiori del numero $-\frac{b}{a}$ e la (2) è verificata, invece, per tutti i

valori di x minori del numero $-\frac{b}{a}$.

OSSERVAZIONE.

Tutti i risultati validi per le equazioni si estendono anche alle disequazioni. Ad esempio, due disequazioni si dicono equivalenti se ammettono le medesime soluzioni.

Vale, inoltre, il seguente:

TEOREMA. Aggiungendo ad ambedue i membri di una disequazione razionale intera uno stesso polinomio si ottiene una disequazione equivalente alla data.

Da tale Teorema, come si evincerà dagli esempi di seguito riportati, segue che è sempre possibile cambiare di segno tutti i termini di una disequazione, ossia moltiplicare ambo i membri per -1 , purché si cambi anche il senso, ovvero il verso, della disequazione.

Esempi.

1) Sia data la disequazione:

$$3x - \frac{1}{4} > 20 - \frac{2x}{3}$$

Per risolvere tale disequazione è possibile procedere in due modi.

a) Determinare il minimo comune multiplo tra i due membri della disequazione (nel nostro caso $m.c.m. = 3 \times 4 = 12$).

Risulta allora possibile scrivere la disequazione data nel seguente modo:

$$\frac{3x(12) - 1(3)}{12} > \frac{20(12) - 2x(4)}{12}$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per 12, si ottiene:

$$3x(12) - 1(3) > 20(12) - 2x(4)$$

ed eseguendo i calcoli:

$$36x - 3 > 240 - 8x$$

Separando ora i termini di primo grado da quelli di grado zero ovvero dai termini noti, si ha:

$$36x + 8x > 240 + 3 \Rightarrow 44x > 243 \Rightarrow x > \frac{243}{44}$$

Ne segue che la disequazione data è soddisfatta per tutti quei valori della x che risultano essere maggiori del numero $\frac{243}{44}$. Graficamente l'insieme delle soluzioni viene in genere riportato sulla cosiddetta **retta orientata** nel seguente modo:



b) Separare i termini di primo grado dai termini noti (di grado zero):

$$3x + \frac{2x}{3} > 20 + \frac{1}{4} \Rightarrow x \left(3 + \frac{2}{3} \right) > 20 + \frac{1}{4} \Rightarrow x \left(\frac{9+2}{3} \right) > \frac{80+1}{4} \Rightarrow x \left(\frac{11}{3} \right) > \frac{81}{4} \Rightarrow \frac{11}{3}x > \frac{81}{4} \Rightarrow x > \frac{81}{4} \cdot \frac{3}{11} = \frac{243}{44}$$

Dunque il risultato ottenuto è lo stesso e la rappresentazione grafica sarà pertanto la medesima.

2) Si consideri la disequazione:

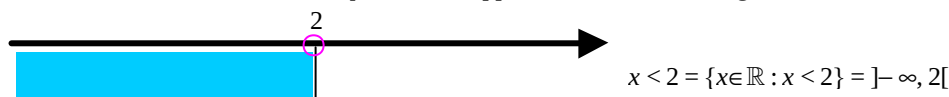
$$4 - 3x > 5x - 12$$

Applicando il **principio del trasporto**, ovvero separando, come al solito, i termini di primo grado dai termini noti, si ottiene:

$$-5x - 3x > -12 - 4 \Rightarrow -8x > -16 \Rightarrow +8x < +16 \Rightarrow x < 2$$

Ne segue che la disequazione data è soddisfatta per tutti quei valori della x che risultano essere minori di 2.

Graficamente l'insieme delle soluzioni della disequazione è rappresentato nel modo seguente:



3) Risolvere la disequazione:

$$2(x-2)^2 - 2(x+1) < 2(x-2)(x+1)$$

In primo luogo bisogna ridurre la disequazione in forma normale, eseguendo tutte le operazioni possibili:

$$2(x^2 + 4 - 4x) - 2x - 2 < 2(x^2 + x - 2x - 2) \Rightarrow 2x^2 + 8 - 8x - 2x - 2 < 2x^2 - 2x - 4 \Rightarrow -8x < -4 - 8 + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow +8x > +10 \Rightarrow x > \frac{10}{8} \Rightarrow x > \frac{5}{4}$$

Graficamente l'insieme delle soluzioni della disequazione è rappresentato nel modo seguente:



4) Risolvere la seguente disequazione:

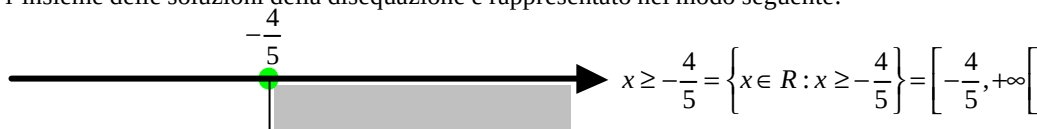
$$\frac{2}{3}x - \frac{4}{5} \leq \frac{5}{4}x - \frac{1}{3}$$

Anche in questo caso, come già fatto nel precedente esempio 1), bisogna in primo luogo liberare la disequazione dai denominatori procedendo come si fa normalmente per le equazioni ossia andando a calcolare in minimo comune multiplo. Nel caso in esame risulta che $m. c. m. = 3 \times 5 \times 4 = 60$. Ne segue:

$$\frac{2}{3}x - \frac{4}{5} \leq \frac{5}{4}x - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2(20)x - 4(12)}{60} \leq \frac{5(15)x - 20}{60} \Rightarrow \frac{40x - 48}{60} \leq \frac{75x - 20}{60} \Rightarrow 40x - 48 \leq 75x - 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40x - 75x \leq -20 + 48 \Rightarrow -35x \leq +68 \Rightarrow +35x \geq -28 \Rightarrow x \geq -\frac{28}{35} \Rightarrow x \geq -\frac{4}{5}$$

Graficamente l'insieme delle soluzioni della disequazione è rappresentato nel modo seguente:



DISEQUAZIONI RAZIONALI INTERE DI SECONDO GRADO.

Le disequazioni razionali intere di secondo grado sono espressioni della forma $P_1(x) > P_2(x)$ oppure $P_1(x) < P_2(x)$ dove $P_1(x)$ e $P_2(x)$ sono polinomi di secondo grado nella variabile x .

In generale, però, una disequazione razionale intera di secondo grado è sempre riducibile alla **forma normale**:

$$(1) \quad ax^2 + bx + c > 0$$

oppure

$$(2) \quad ax^2 + bx + c < 0$$

con $a \neq 0$.

Inoltre si può sempre supporre $a > 0$, cioè il coefficiente della x^2 sempre positivo: in caso contrario, infatti, è possibile moltiplicare ambo i membri della disequazione per -1 , ovvero cambiare di segno ad ambo i membri, ricordandosi di cambiare, però, anche il senso della disequazione, così da ricondursi ad una delle due forme normali sopra indicate.

Per risolvere tali disequazioni, ovvero per determinare i valori che possono essere attribuiti alla variabile x in modo tale che il trinomio $ax^2 + bx + c$ sia positivo o negativo, bisogna:

a) scrivere l'equazione associata alla disequazione, cioè $ax^2 + bx + c = 0$;

b) determinare le soluzioni x_1 ed x_2 dell'equazione associata con la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

o anche:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

qualora il coefficiente del termine di primo grado sia un multiplo di 2;

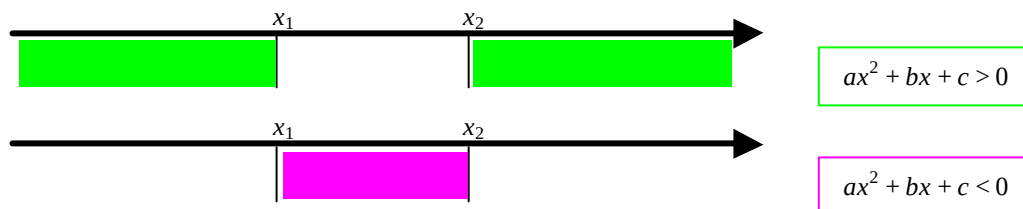
c) osservare in quali dei seguenti tre casi ci si trova:

PRIMO CASO: $D = b^2 - 4ac > 0$

In questo caso:

- l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni reali e distinte x_1 ed x_2 ($x_1 \neq x_2$);
- la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ è soddisfatta per valori esterni all'intervallo di estremi x_1 ed x_2 , supponendo $x_1 < x_2$;
- la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ è soddisfatta per valori interni all'intervallo di estremi x_1 ed x_2 , supponendo $x_1 < x_2$.

Graficamente si ha:

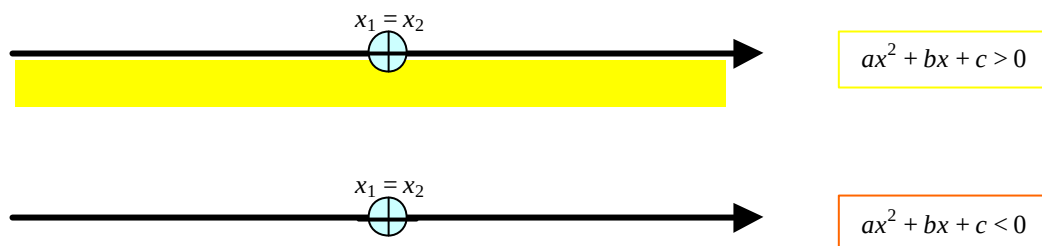


SECONDO CASO: $D = b^2 - 4ac = 0$

In questo caso:

- l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni, x_1 ed x_2 , reali e coincidenti ($x_1 = x_2$);
- la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ è soddisfatta per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$ (insieme dei numeri reali);
- la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ non è mai soddisfatta.

Graficamente si ha:



OSSERVAZIONE.

Questo è il caso in cui ci si trova di fronte ad un trinomio, $ax^2 + bx + c$, che risulta essere il quadrato di un binomio e quindi una quantità sempre positiva!!!

TERZO CASO: $D = b^2 - 4ac < 0$

In questo caso:

- l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni complesse e coniugate x_1 ed x_2 ($x_1 \neq x_2$);
- la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ è soddisfatta per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$;
- la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ non è mai soddisfatta.

Graficamente si ha:



Esempi.

1) $\frac{x^2}{3} - x > \frac{4}{3} - \frac{x^2}{2}$

PRIMO CASO: $D = b^2 - 4ac > 0$

Poiché ci si trova di fronte a delle frazioni occorre dapprima, al fine di semplificare i calcoli, eliminare i denominatori determinando il minimo comune multiplo che, nel caso specifico, risulta essere pari a $3 \times 2 = 6$. Ne segue:

$$\frac{2x^2 - 6x}{6} > \frac{8 - 3x^2}{6} \Rightarrow 2x^2 - 6x > 8 - 3x^2 \Rightarrow 2x^2 + 3x^2 - 6x - 8 > 0 \Rightarrow 5x^2 - 6x - 8 > 0$$

Occorre ora trovare le soluzioni dell'equazione associata:

$$5x^2 - 6x - 8 = 0$$

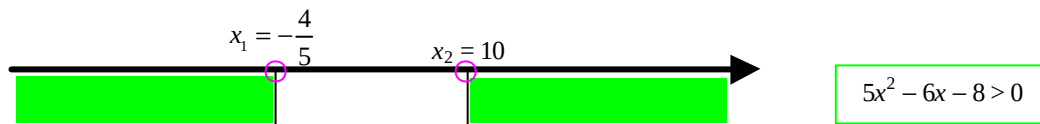
Utilizzando la formula risolutiva si ha:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(5)(-8)}}{2(5)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 160}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{196}}{10} = \frac{6 \pm 14}{10} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6-14}{10} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5} \\ x_2 = \frac{6+14}{10} = \frac{20}{10} = 2 \end{cases}$$

Dunque, essendo $a > 0$ e $\Delta > 0$, la disequazione data è soddisfatta per valori esterni all'intervallo di estremi x_1 ed x_2 , cioè per:

$$x < -\frac{4}{5} \quad \text{e} \quad x > 2$$

Si osservi che gli estremi non sono compresi in quanto nella disequazione figura il simbolo ">" e non quello "≥". Graficamente è possibile rappresentare l'insieme delle soluzioni della disequazione assegnata nel modo seguente:



2) $-x^2 + 9x - 14 > 0$

PRIMO CASO: $D = b^2 - 4ac < 0$

In questo caso risulta $a < 0$ ma, in virtù di quanto sopra detto, è sempre possibile ricondursi al caso $a > 0$ moltiplicando ambo i membri della disequazione data per -1 , ovvero cambiando di segno ad ambo i membri della disequazione, ricordandosi chiaramente di cambiare anche il verso della disequazione. Nel caso in questione, quindi, si avrà:

$$x^2 - 9x + 14 < 0$$

la cui equazione associata:

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

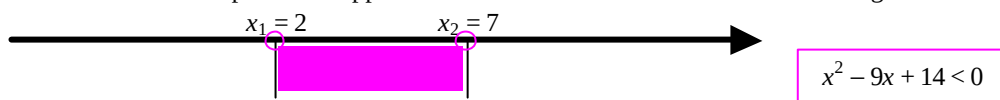
avrà come soluzioni:

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4(1)(14)}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9-5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{9+5}{2} = \frac{14}{2} = 7 \end{cases}$$

Dunque, essendo $a > 0$ e $\Delta < 0$, la disequazione è soddisfatta per valori esterni all'intervallo di estremi x_1 ed x_2 , cioè per:

$$x < x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x > x_2 = 7$$

Si osservi che anche in questo caso sono stati esclusi gli estremi in quanto nella disequazione figura il simbolo "<" e non quello "≤". Graficamente è possibile rappresentare l'insieme delle soluzioni nel modo seguente:



3) $x^2 - 25 \geq 0$

PRIMO CASO: $D = b^2 - 4ac > 0$

In questo caso risulta $a > 0$, manca il termine in x e si può osservare che il binomio, che figura al primo membro, è proprio la differenza di due quadrati, precisamente è il risultato del prodotto di una somma per la loro differenza.

Quindi l'equazione associata può essere scritta anche come:

$$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 5) = 0 \Rightarrow x_1 = +5 \quad \text{e} \quad x_2 = -5$$

Si osservi, però che era possibile ottenere lo stesso risultato anche per altra via:

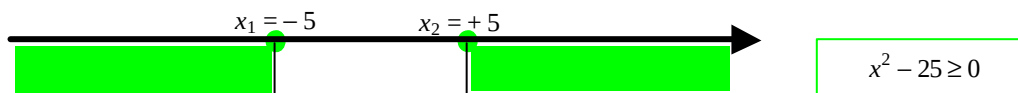
$$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 5$$

Dunque, essendo $a > 0$ e $\Delta > 0$, la disequazione è soddisfatta per valori esterni all'intervallo di estremi x_1 ed x_2 , cioè per:

$$x \leq x_1 = -5 \quad \text{e} \quad x \geq x_2 = +5$$

Si osservi che è stato messo anche il segno di uguale in quanto gli estremi dell'intervallo devono essere compresi, figurando nella disequazione di partenza non semplicemente il simbolo " $>$ ", bensì quello di " $\geq$ ".

Graficamente è possibile rappresentare l'insieme delle soluzioni nel modo seguente:



4) $2x^2 - 3x + 5 > 0$

TERZO CASO: $D = b^2 - 4ac < 0$

Le soluzioni dell'equazione associata $2x^2 - 3x + 5 = 0$ sono complesse coniugate in quanto:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(2)(5) = 9 - 40 = -31 < 0$$

Dunque, essendo $a > 0$ e $\Delta < 0$, la disequazione è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Graficamente è possibile rappresentare l'insieme delle soluzioni nel modo seguente:



5) $x^2 - 6x + 9 > 0$

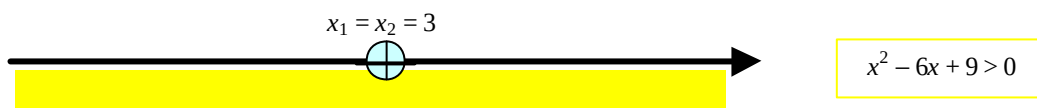
SECONDO CASO: $D = b^2 - 4ac = 0$

Le soluzioni dell'equazione associata $x^2 - 6x + 9 = 0$ sono reali e coincidenti, essendo il trinomio, che figura al primo membro dell'equazione, proprio il quadrato del binomio $x - 3$, ovvero essendo $\Delta = 36 - 36 = 0$. Si può allora scrivere:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 3$$

Ne segue che la disequazione è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R} / \{x = 3\}$, ovvero per tutti gli x appartenenti ad $\mathbb{R}$, ad eccezione di $x = 3$, valore che soddisfa l'equazione associata ma non la disequazione data (nella disequazione, infatti, compare il simbolo " $>$ " e non il simbolo " $\geq$ ").

Graficamente è possibile rappresentare l'insieme delle soluzioni nel modo seguente:



6) $x^2 - x + 5 < 0$

TERZO CASO: $D = b^2 - 4ac < 0$

Le soluzioni dell'equazione associata $x^2 - x + 5 = 0$ sono complesse e coniugate, essendo:

$$\Delta = 1 - 4(5) = 1 - 20 = -19 < 0$$

Ne segue che la disequazione non è mai soddisfatta, indipendentemente dal valore attribuito alla variabile $x \in \mathbb{R}$.

Graficamente è possibile rappresentare l'insieme delle soluzioni nel modo seguente:



DISEQUAZIONI RAZIONALI FRATTE O FRAZIONARIE.

Le disequazioni razionali fratte o frazionarie sono così denominate in quanto presentano la variabile x al denominatore. Se ridotte a forma normale sono del tipo:

$$(1) \quad \frac{P_1(x)}{P_2(x)} > 0$$

oppure:

$$(2) \quad \frac{P_1(x)}{P_2(x)} < 0$$

dove:

- $P_2(x) \neq 0$;
- $P_1(x)$ e $P_2(x)$ sono polinomi nella variabile x ;
- il grado di $P_1(x)$ è arbitrario;
- il grado di $P_2(x)$ è maggiore od uguale ad uno (se $P_2(x)$ avesse grado zero, cioè se $P_2(x)$ fosse un numero, allora non si potrebbe parlare di disequazione frazionaria).

Per studiare tali disequazioni occorre studiare il segno del rapporto $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$, cioè determinare il segno sia del numeratore che del denominatore.

Pertanto la (1) avrà soluzioni per quei valori della x per i quali numeratore e denominatore sono concordi (entrambi positivi o entrambi negativi), mentre la (2) avrà soluzioni per quei valori della x per i quali numeratore e denominatore sono discordi (l'uno positivo e l'altro negativo). Precisamente:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} > 0 \Leftrightarrow P_1(x) > 0 \text{ e } P_2(x) > 0 \quad \text{oppure} \quad P_1(x) < 0 \text{ e } P_2(x) < 0 \quad (a)$$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} < 0 \Leftrightarrow P_1(x) > 0 \text{ e } P_2(x) < 0 \quad \text{oppure} \quad P_1(x) < 0 \text{ e } P_2(x) > 0 \quad (b)$$

Dopo aver risolto le disequazioni (a) o (b) ed aver riportato su uno stesso grafico le soluzioni ottenute, per determinare le soluzioni della disequazione fratta basta applicare la regola dei segni e considerare, come soluzioni della (1) quelle con il segno positivo, e come soluzioni della (2) quelle con il segno negativo.

Esempi.

1) Sia data la seguente disequazione:

$$\frac{3x-2}{9-x^2} > 0$$

Questa ha soluzioni se numeratore e denominatore sono concordi, cioè se:

$$(a) \quad 3x-2 > 0 \quad \text{e} \quad 9-x^2 > 0$$

oppure se:

$$(a') \quad 3x-2 < 0 \quad \text{e} \quad 9-x^2 < 0$$

Se si considerano le disequazioni (a) si ottengono le soluzioni:

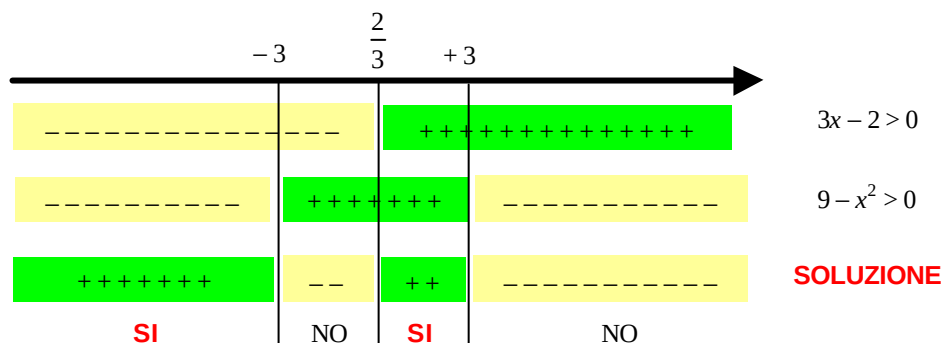
$$x > \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad -3 < x < +3$$

Analogamente, dalle (a') segue:

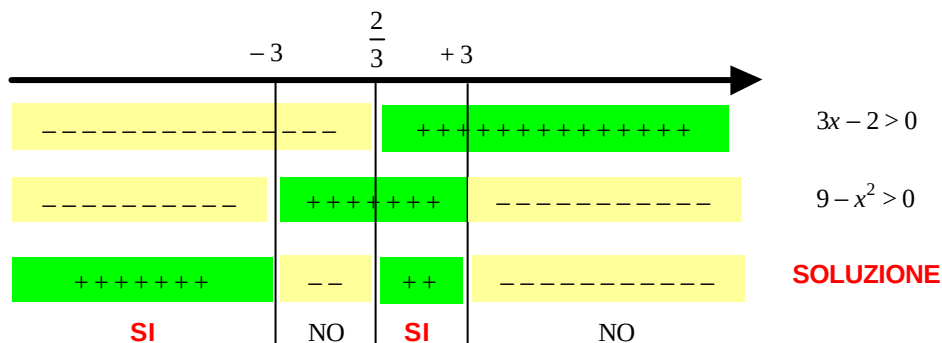
$$x < \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad x > -3, x < +3$$

Graficamente si ha:

(a)



(a')



Come si può constatare dai due grafici le soluzioni sono le medesime indipendentemente dalle disequazioni (a) o (a') che si considerano. Dunque la disequazione data ha soluzione per:

$$-\infty < x < -3 \quad \text{e} \quad \frac{2}{3} < x < +3$$

2) Sia data la disequazione:

$$\frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 7} < 0$$

Questa ha soluzioni se numeratore e denominatore sono discordi, cioè se

$$(a) \quad x^3 - 3x^2 > 0 \quad \text{e} \quad x^2 - 5x + 7 < 0$$

oppure se:

$$(a') \quad x^3 - 3x^2 < 0 \quad \text{e} \quad x^2 - 5x + 7 > 0$$

Se, ad esempio, si considerano le disequazioni (a'), allora si ottengono le soluzioni:

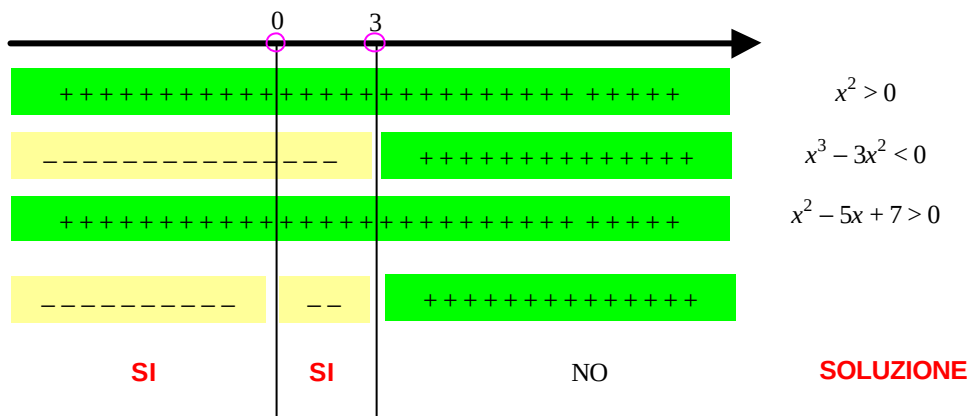
$$x^3 - 3x^2 < 0 \Rightarrow x^2(x - 3) < 0 \Rightarrow x^2 > 0 \text{ e } x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3 \quad (x^2 \text{ è sempre positivo in quanto è un quadrato!!!})$$

$$x^2 - 5x + 7 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 - 5x + 7 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 28}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2} \quad \Delta < 0$$

Graficamente si ha:

(a')



Si osservi che si sarebbero ottenute le medesime soluzioni qualora si fossero prese in considerazione le disequazioni (a). Ne segue che la disequazione data ha soluzione per:

$$-\infty < x < 0 \quad \text{e} \quad 0 < x < +3$$

SISTEMI DI DISEQUAZIONI.

Un sistema di disequazioni è l'insieme di due o più disequazioni che devono essere verificate contemporaneamente per gli stessi valori della variabile x .

Risolvere un sistema, ovvero trovare le sue soluzioni, quindi, significa determinare le soluzioni comuni a tutte le disequazioni che costituiscono il sistema.

Un sistema che non ammette soluzioni è detto impossibile.

Esempi.

1) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 > 0 \\ 2x^2 - 15x + 7 < 0 \end{cases}$$

In primo luogo occorre risolvere le due disequazioni che costituiscono il sistema separatamente.

Si consideri la prima disequazione:

$$x^2 - 8x + 15 > 0$$

Le soluzioni dell'equazione associata $x^2 - 8x + 15 = 0$ sono:

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1 = \begin{cases} 3 = x_1 \\ 5 = x_2 \end{cases}$$

Quindi la prima disequazione del sistema è soddisfatta per $x < 3$ e $x > 5$, cioè:



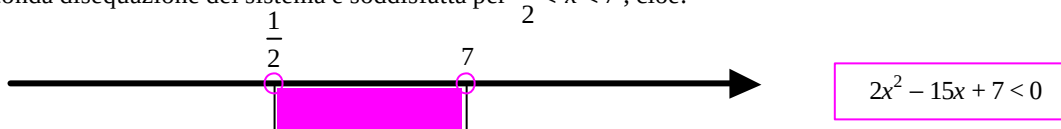
Si consideri ora la seconda disequazione:

$$2x^2 - 15x + 7 < 0$$

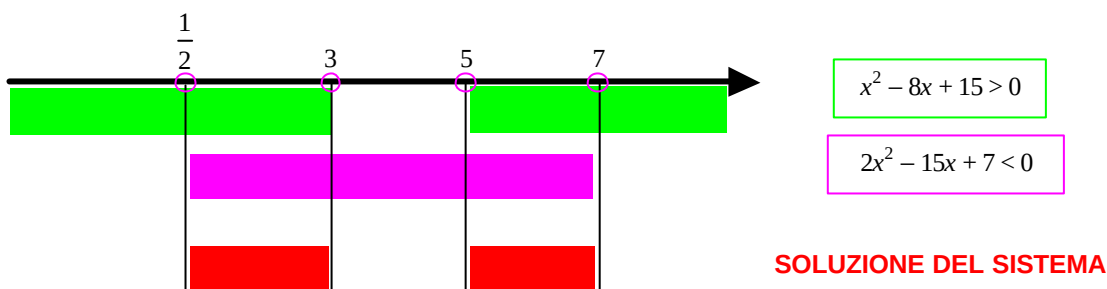
Le soluzioni dell'equazione associata $2x^2 - 15x + 7 = 0$ sono:

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 56}}{4} = \frac{15 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{15 \pm 13}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} = x_1 \\ 7 = x_2 \end{cases}$$

Quindi la seconda disequazione del sistema è soddisfatta per $\frac{1}{2} < x < 7$, cioè:



Dunque le soluzioni del sistema sono proprio le soluzioni comuni alle due disequazioni che lo costituiscono, cioè:



2) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 9 < 0 \\ x - 7 > 0 \end{cases}$$

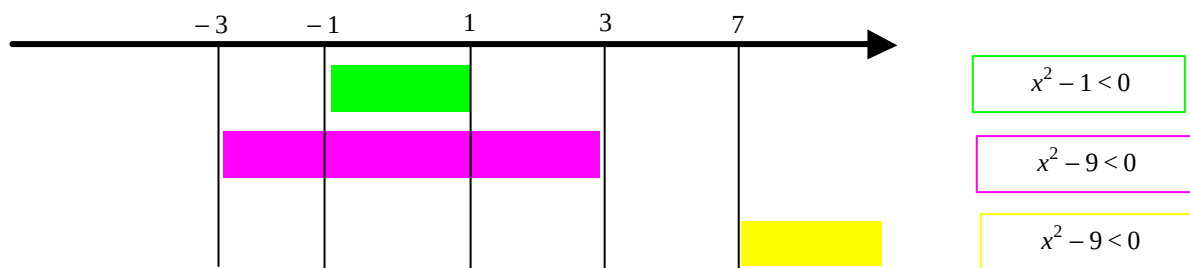
Per risolvere tale sistema occorre determinare le soluzioni delle disequazioni, che lo costituiscono, separatamente.

$$x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < +1$$

$$x^2 - 9 < 0 \Rightarrow -3 < x < +3$$

$$x - 7 > 0 \Rightarrow x > +7$$

Risulta ora possibile determinare le soluzioni del sistema:



Come si evince dal grafico precedente il sistema non ha soluzioni, ovvero è impossibile, in quanto non esistono soluzioni comuni a tutte e tre le disequazioni del sistema.

3) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x + 2 > \frac{1}{3}x + 1 \\ x^2 + 3x - 10 < 0 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}$$

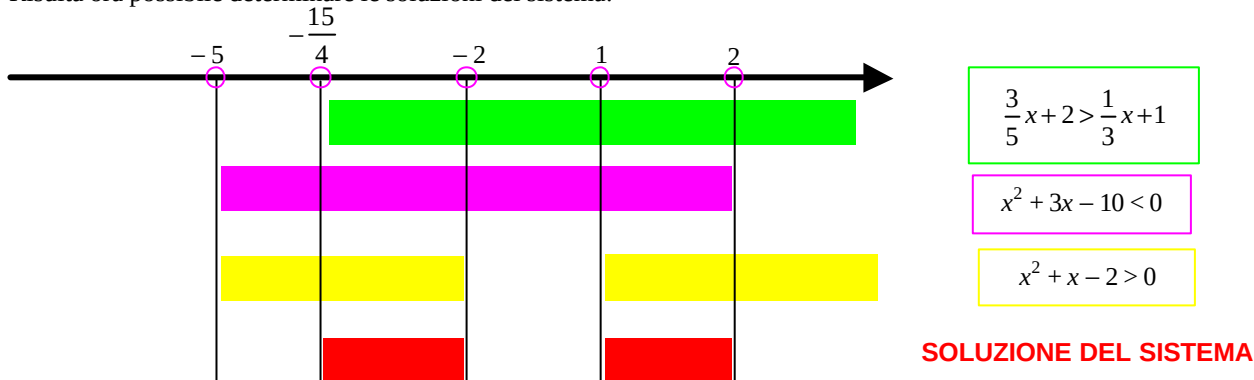
Per risolvere tale sistema occorre determinare le soluzioni delle disequazioni, che lo costituiscono, separatamente.

$$\frac{3}{5}x + 2 > \frac{1}{3}x + 1 \Rightarrow 9x + 30 > 5x + 15 \Rightarrow 9x - 5x > 15 - 30 \Rightarrow 4x > -15 \Rightarrow x > -\frac{15}{4}$$

$$x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow -5 < x < +2$$

$$x^2 + x - 2 > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ e } x > +1$$

Risulta ora possibile determinare le soluzioni del sistema:



Ne segue che il sistema ha soluzioni per:

$$-\frac{15}{4} < x < -2 \quad \text{e} \quad 1 < x < 2$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI.

Una disequazione si dice **irrazionale** se l'incognita compare all'interno di radicali, ovvero sotto il segno di radice. Come accade per gli altri tipi di disequazioni, risulta sempre possibile ridurre una qualunque disequazione irrazionale a **forma normale**, del tipo:

$$\sqrt[n]{P_1(x)} > P_2(x)$$

oppure:

$$\sqrt[n]{P_1(x)} < P_2(x)$$

dove l'indice di radice $n \geq 2$ è un numero intero (per $n = 1$, infatti, ci si riconduce ad una delle disequazioni razionali sopra analizzate della forma $P_1(x) > P_2(x)$ oppure $P_1(x) < P_2(x)$). Occorre in questo caso, però, distinguere i seguenti due casi.

PRIMO CASO: n DISPARI

In questo caso, ricordando la proprietà delle disuguaglianze tra numeri (cfr. proprietà delle disuguaglianze)

$$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n \quad \text{oppure} \quad a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$$

ed elevando alla potenza n -esima ambo i membri delle disequazioni

$$\sqrt[n]{P_1(x)} > P_2(x) \quad \text{oppure} \quad \sqrt[n]{P_1(x)} < P_2(x)$$

si ottengono rispettivamente le disequazioni

$$\left(\sqrt[n]{P_1(x)}\right)^n > (P_2(x))^n \quad \text{oppure} \quad \left(\sqrt[n]{P_1(x)}\right)^n < (P_2(x))^n$$

cioè

$$P_1(x) > [P_2(x)]^n \quad \text{oppure} \quad P_1(x) < [P_2(x)]^n$$

equivalenti alle date.

Dunque, per risolvere una qualunque disequazione irrazionale il cui indice di radice n sia un numero dispari, è sufficiente elevare alla potenza n -esima ambo i membri della disequazione, senza alterarne il verso.

Esempi.

1) Si consideri la disequazione:

$$\sqrt[3]{x^3 - 2x} < x - 2$$

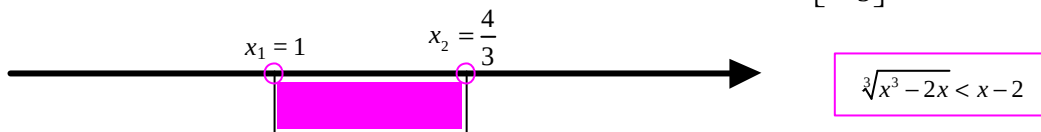
Per risolvere tale disequazione basta elevare ambo i membri ad $n = 3$, ottenendo così una disequazione equivalente alla data:

$$x^3 - 2x < (x - 2)^3 \Rightarrow x^3 - 2x < x^3 - 8 - 6x^2 + 12x \Rightarrow 6x^2 - 2x - 12x + 8 < 0 \Rightarrow 6x^2 - 14x + 8 < 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 4 < 0$$

Risolvendo l'equazione associata, $3x^2 - 7x + 4 = 0$, si ottiene:

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4(3)(4)}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6} = \frac{7 \pm 1}{6} = \begin{cases} 1 = x_1 \\ \frac{4}{3} = x_2 \end{cases}$$

Ne segue che la disequazione $3x^2 - 7x + 4 < 0$ è soddisfatta per valori interni all'intervallo $\left[1, \frac{4}{3}\right]$, cioè per $1 < x < \frac{4}{3}$.



2) Si consideri la disequazione irrazionale:

$$\sqrt[3]{x-2} > \sqrt[3]{1-x}$$

Poiché $n = 3$ è dispari, per risolvere la disequazione assegnata basta elevare al cubo entrambi i membri della disequazione, ottenendone così una equivalente alla data, da cui poi poter ricavare la soluzione richiesta:

$$(\sqrt[3]{x-2})^3 > (\sqrt[3]{1-x})^3 \Rightarrow x-2 > 1-x \Rightarrow x+x > 1+2 \Rightarrow 2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$



SECONDO CASO: n PARI

Se n è dispari la risoluzione delle disequazioni irrazionali non risulta affatto immediata. In questo caso, infatti, è necessario distinguere i seguenti due sottocasi:

a) $\sqrt[n]{P_1(x)} < P_2(x)$

b) $\sqrt[n]{P_1(x)} > P_2(x)$

Per comodità di calcoli ci si porrà nella condizione in cui sia $n = 2$, ovvero nel caso più comune delle radici quadrate.

a) $\sqrt{P_1(x)} < P_2(x) \Rightarrow \sqrt{P_1(x)} < P_2(x) \Rightarrow \sqrt{P_1(x)} < P_2(x)$

In tal caso, affinché la disequazione abbia senso, occorre imporre, in primo luogo, la condizione di realtà del radicando, cioè:

$$(1) \quad P_1(x) \geq 0$$

Inoltre, dovendo essere $P_1(x) \geq 0$, affinché la disequazione sia soddisfatta, occorre che il polinomio $P_2(x)$ sia positivo, cioè:

$$(2) \quad P_2(x) > 0$$

Sotto le condizioni (1) e (2), risulta ora possibile elevare ambo i membri della disequazione di partenza al quadrato, cioè:

$$(3) \quad (\sqrt{P_1(x)})^2 < [P_2(x)]^2 \Rightarrow P_1(x) < [P_2(x)]^2$$

Dunque per risolvere la disequazione data, basta trovare le soluzioni del sistema costituito dalle condizioni (1), (2) e (3), cioè:

$$\begin{cases} P_1(x) \geq 0 \\ P_2(x) > 0 \\ P_1(x) < [P_2(x)]^2 \end{cases}$$

Esempi.

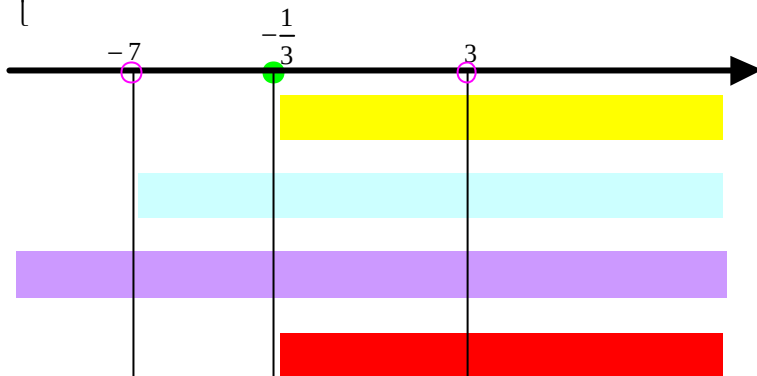
1) Si consideri la disequazione:

$$\sqrt{3x+1} < x+7$$

Per determinare le soluzioni di tale disequazione basta risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x+7 > 0 \\ 3x+1 < (x+7)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x > -7 \\ 3x+1 < x^2+49+14x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x > -7 \\ x^2+11x+48 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x > -7 \\ x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121-192}}{2} = \frac{-11 \pm \sqrt{-71}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x > -7 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Prima disequazione

Seconda disequazione

Terza disequazione

SOLUZIONE DELLA DISEQUAZIONE

$$-\frac{1}{3} \leq x < +\infty$$

2) Si consideri la disequazione:

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{3-4x} < 0$$

La disequazione data può essere trasformata nella seguente:

$$\sqrt{x+5} < -\sqrt{3-4x}$$

che, per quanto asserito più volte, è impossibile (la radice quadrata, infatti, non potrà mai assumere valore negativo!!!).

3) Si consideri la disequazione:

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+4} - \sqrt{9-3x} \leq 0$$

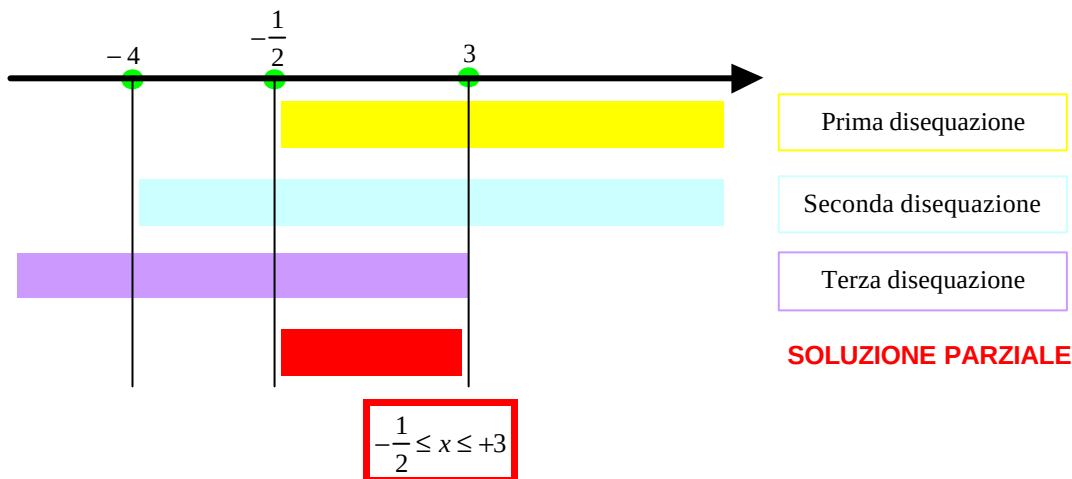
Si osservi, in primo luogo, che la disequazione data può essere scritta anche nella forma:

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+4} \leq \sqrt{9-3x}$$

Per determinare le soluzioni di tale disequazione basta risolvere allora il seguente sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \\ 9-3x \geq 0 \\ (\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+4})^2 \leq (\sqrt{9-3x})^2 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq -4 \\ x \leq 3 \\ 2x+1+x+4+2\sqrt{2x+1}\sqrt{x+4} \leq 9-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq -4 \\ x \leq 3 \\ 2\sqrt{(2x+1)(x+4)} \leq 4-6x \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq -4 \\ x \leq 3 \\ \sqrt{(2x+1)(x+4)} \leq 2-3x \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq -4 \\ x \leq 3 \\ \sqrt{2x^2+9x+4} \leq 2-3x \end{cases} \end{aligned}$$

Dalle prime tre disequazioni che costituiscono il sistema si ha:



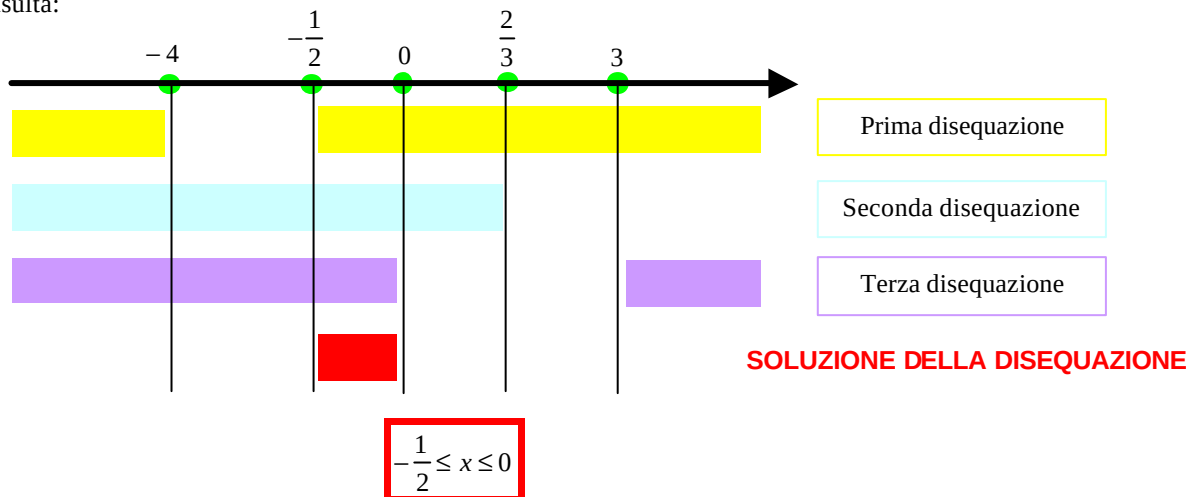
All'interno di tale intervallo, quindi, bisogna determinare le soluzioni della disequazione:

$$\sqrt{2x^2+9x+4} \leq 2-3x$$

che è equivalente al sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x^2+9x+4 \geq 0 \\ 2-3x \geq 0 \\ 2x^2+9x+4 \geq (2-3x)^2 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+9x+4 \geq 0 \\ x \leq \frac{2}{3} \\ 2x^2+9x+4 \geq 4+9x^2-12x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+9x+4 \geq 0 \\ x \leq \frac{2}{3} \\ 7x^2-21x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+9x+4 \geq 0 \\ x \leq \frac{2}{3} \\ x^2-3x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x \leq -4, x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq \frac{2}{3} \\ x \leq 0, x \geq 3 \end{cases} & \end{aligned}$$

Dunque risulta:



$$b) \sqrt[n]{P_1(x)} > P_2(x) \Rightarrow \sqrt[n]{P_1(x)} > P_2(x) \Rightarrow \sqrt{P_1(x)} > P_2(x)$$

In tal caso, affinché la disequazione abbia senso, occorre imporre, in primo luogo, la condizione di realtà del radicando, cioè:

$$(1) \quad P_1(x) \geq 0$$

Inoltre, se fosse

$$(2) \quad P_2(x) < 0$$

la disequazione sarebbe senz'altro verificata.

Ne segue che le soluzioni del sistema costituito da (1) e (2), cioè:

$$(A) \quad \begin{cases} P_1(x) \geq 0 \\ P_2(x) < 0 \end{cases}$$

sono anche soluzioni della disequazione data.

Se, però, fosse

$$(2') \quad P_2(x) \geq 0$$

la disequazione sarebbe soddisfatta se si verificasse:

$$(3) \quad P_1(x) > [P_2(x)]^2$$

Ne segue che le soluzioni del sistema costituito da (1), (2') e (3), cioè:

$$(B) \quad \begin{cases} P_1(x) \geq 0 \\ P_2(x) \geq 0 \\ P_1(x) > [P_2(x)]^2 \end{cases}$$

sono anche soluzioni della disequazione data.

Si osservi, però, che la condizione (1) è compresa nella (3), poiché si ha:

$$P_1(x) > [P_2(x)]^2 \geq 0$$

e quindi la si può tralasciare.

In conclusione, le soluzioni della disequazione di partenza sono date dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$(A) \quad \begin{cases} P_1(x) \geq 0 \\ P_2(x) < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (B) \quad \begin{cases} P_2(x) \geq 0 \\ P_1(x) > [P_2(x)]^2 \end{cases}$$

Esempi.

1) Si consideri la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt{4-x} > 3x-2$$

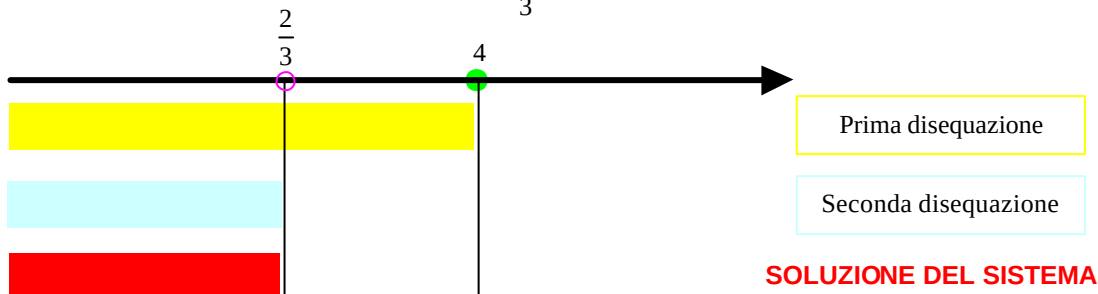
Per determinare le soluzioni di tale disequazione basta risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$(A) \quad \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 3x-2 < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (B) \quad \begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ 4-x > (3x-2)^2 \end{cases}$$

Risolviendo il sistema (A) si ottiene:

$$\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 3x-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-4 \leq 0 \\ 3x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

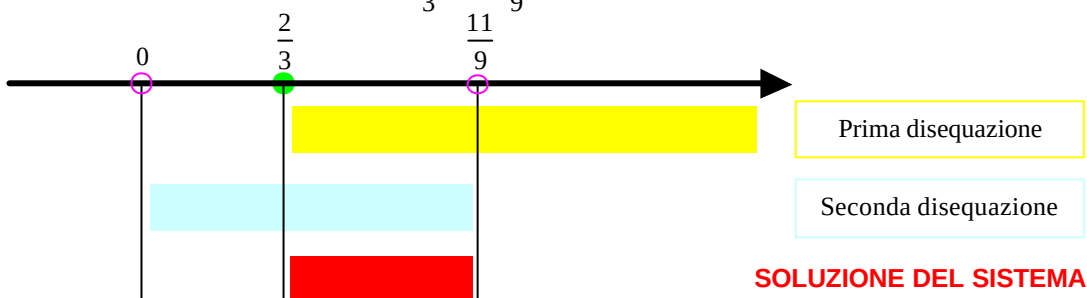
Ne segue che il sistema (A) è soddisfatto per $-\infty < x < \frac{2}{3}$, come si evince dal grafico seguente:



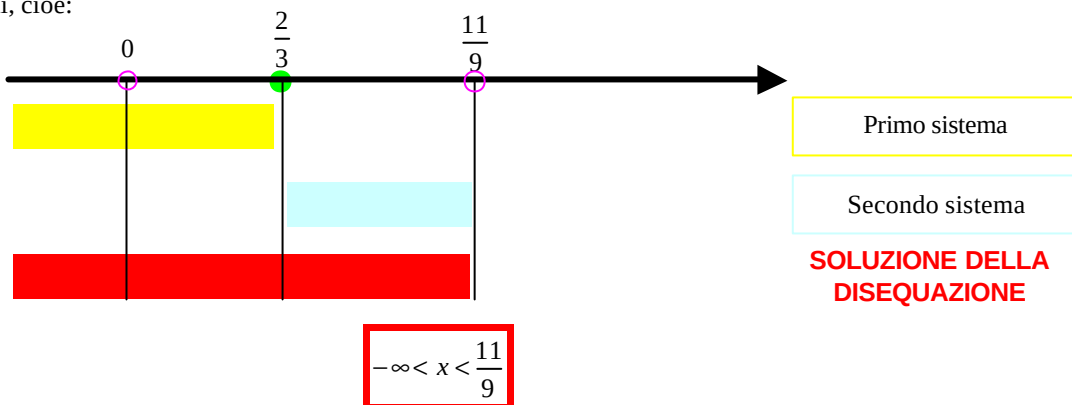
Risolviendo il sistema (B), invece, si ottiene:

$$\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ 4-x > (3x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x \geq 2 \\ 4-x > 9x^2+4-12x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 9x^2-11x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x(9x-11) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 0 < x < \frac{11}{9} \end{cases}$$

Ne segue che il sistema (B) è soddisfatto per $\frac{2}{3} \leq x < \frac{11}{9}$, come si evince dal grafico seguente:



Per ottenere le soluzioni della disequazione iniziale richiesta è ora sufficiente unire le soluzioni dei due sistemi considerati, cioè:



2) Si consideri la disequazione irrazionale:

$$\sqrt{x+4} > \sqrt[3]{x-8}$$

In questo caso la condizione di esistenza riguarda solo il radicale che figura al primo membro della disequazione. Pertanto i sistemi (A) e (B) diventano:

$$(A) \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x-8 < 0 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x-8 \geq 0 \\ (x+4)^3 > (x-8)^2 \end{cases}$$

Quindi, risolvendo i due sistemi, si ha:

Il diagramma mostra una retta numerata con i punti -4 e 8 . La soluzione del sistema è l'intervallo $(-4, 8)$, indicato dalla sovrapposizione delle aree gialla e ciano. Le barre separate (gialla e rossa) rappresentano le soluzioni individuali delle due disequazioni.

Diagram illustrating the solution of a system of three linear inequalities on a number line. The number line has points at -4 , 0 , and 8 .

- Prima disequazione:** $x > -4$ (Yellow bar)
- Seconda disequazione:** $x < 8$ (Cyan bar)
- Terza disequazione:** $x > 0$ (Purple bar)

The intersection of these three inequalities is the red bar, labeled **SOLUZIONE DEL SISTEMA**, which represents the solution set $0 < x < 8$.

Diagram illustrating the solution of a system of inequalities on a number line. The number line has points at -4 , 0 , and 8 .

- The first system (Primo sistema) is represented by a yellow bar from -4 to 8 .
- The second system (Secondo sistema) is represented by a light blue bar starting at 8 and extending to the right.
- The solution of the system (SOLUZIONE DELLA DISEQUAZIONE) is represented by a red bar starting at -4 and extending to the right.

21

3) Si consideri la disequazione irrazionale:

$$\frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{x+4}} \geq 0$$

In questo caso, poiché risulta:

$$\frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{x+4}} = \sqrt{\frac{7-x}{x+4}}$$

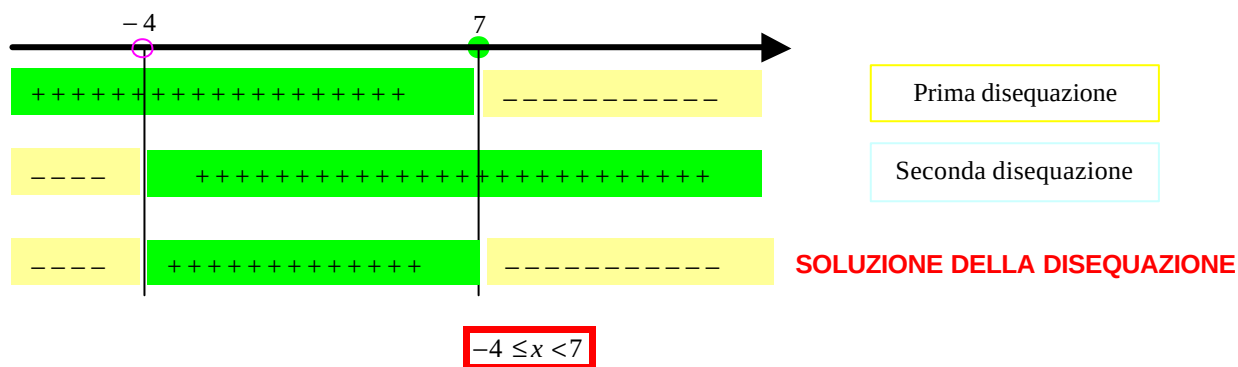
per risolvere la disequazione data, sarà sufficiente imporre le condizioni di esistenza del radicando, cioè:

$$\frac{7-x}{x+4} \geq 0$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} 7-x \geq 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x > -4 \end{cases}$$

Dunque la disequazione data è soddisfatta per:



ESERCIZI PROPOSTI.

Disequazioni razionali intere di primo grado.

$$(x+2)^2 > x^2$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 < x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} > 2$$

$$\frac{1}{2}x - 6 < 0$$

$$7 - (2x - 1) < x - 3$$

$$3x - 4(-2x - 6) < 2(3x - 6) - 4$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(x+2) < 2x - \frac{1}{2}(x+4)$$

$$\frac{(3x-2)^2}{4} - 1 < \frac{(3x+4)^2}{4} - \frac{3}{4}x + 1$$

$$(x-1)^2 - \frac{1}{3}x < x\left(x - \frac{1}{3}\right) - 2x - 4$$

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) - x(x+2) + 3x < x(4+3x) - \frac{2x-1}{4}$$

$$x(2-x)^2 + 4(x+4)^2 < x^3 - 8 + \frac{3x-6}{5}$$

$$\frac{\frac{x-2}{3} - \frac{x-4}{2}}{\frac{1}{4}} + \frac{5}{6}x < \frac{5-2x}{12}$$

$$\frac{x}{4} - 16 + 18x > x\left(x + \frac{1}{4}\right) - (x-9)^2$$

Disequazioni razionali intere di secondo grado.

$$x^2 - 6x > 0$$

$$3x - x^2 > 0$$

$$x^2 - 4 < 0$$

$$x^2 - 8 > 0$$

$$x^2 - 6x + 8 > 0$$

$$x^2 + 3x - 4 > 0$$

$$x^2 - 8x + 15 < 0$$

$$x^2 - 9x + 18 < 0$$

$$-6x^2 < 0$$

$$x^2 + 1 > 0$$

$$9x^2 - 6x + 1 \geq 0$$

$$-x^2 + 7 \leq 0$$

$$6x^2 - 5 \geq 0$$

$$8x^2 - 4x(2x-1) + 4x^2 - 3 \geq 0$$

$$[x > -1]$$

$$\left[x < \frac{41}{6}\right]$$

$$\left[x < \frac{9}{8}\right]$$

$$\left[x > \frac{10}{3}\right]$$

$$[x < 12]$$

$$\left[x > \frac{11}{3}\right]$$

$$[x < -8]$$

$$\left[x > \frac{5}{8}\right]$$

$$\left[x > -\frac{20}{33}\right]$$

[Nessuna soluzione]

$$\left[-\frac{1}{2} < x < +\infty\right]$$

$$\left[-\infty < x < -\frac{122}{59}\right]$$

$$\left[-\infty < x < -\frac{59}{4}\right]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$[x < 0; x > 6]$$

$$[0 < x < 3]$$

$$[-2 < x < +2]$$

$$\left[x < -2\sqrt{2}; x > 2\sqrt{2}\right]$$

$$[x < 2; x > 4]$$

$$[x < -1; x > 4]$$

$$[3 < x < 5]$$

$$[3 < x < 6]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left[x \leq -\sqrt{7}; x \geq +\sqrt{7}\right]$$

$$\left[x \leq -\frac{\sqrt{30}}{6}; x \geq +\frac{\sqrt{30}}{6}\right]$$

$$\left[-\infty < x \leq -\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \leq x < +\infty\right]$$

$$\frac{x^2+16}{4} - \frac{x-3}{2} < 1-x$$

$$(x+4)^2 - \frac{x-1}{3} + 8 < 0$$

$$(1-3x)^2 > (x+2)(x-2) - 3x + 5$$

$$x - (x+3)^2 - (2x+1)(2x-1) + 3x > -9$$

$$(x-1)(x-3)(x-4) > (x-5)^3$$

$$\frac{3-2x}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} < 3$$

$$x^2 - 3 < (1+2x)^2 - 2$$

$$3x(x-2) < \frac{x+2}{2} - 6x$$

Disequazioni razionali fratte.

$$\frac{2x+1}{3x-2} \geq 0$$

$$\frac{-3x+4}{x-2} < 0$$

$$\frac{4-6x}{2x-1} \geq 0$$

$$\frac{x-1}{x-2} > 0$$

$$\frac{2x-3}{x-4} > 0$$

$$\frac{x-3}{2x-5} < 0$$

$$\frac{4-x}{x-2} > 0$$

$$\frac{11}{2x+3} > \frac{5}{2-x}$$

$$\frac{4}{x+2} > 3 - \frac{x}{x-1}$$

$$\frac{x^2+25}{x^2-4x} < 0$$

$$2x - \frac{x^2-7}{4} \geq \frac{4x-1}{2}$$

$$\frac{8}{2x+5} \geq \frac{7}{3x-2}$$

$$\frac{x^2-5x+8}{9-x^2} < 0$$

$$\frac{x^2+2x-5}{x^2-6x+8} < 0$$

$$\frac{x(x-1)^3}{x^4-81} \geq 0$$

$$\frac{x^4+4x^2}{1-27x^3} \leq 0$$

[Nessuna soluzione]

[Nessuna soluzione]

$$\left[-\infty < x < 0; \frac{3}{8} < x < +\infty \right]$$

$$\left[\frac{-1-\sqrt{6}}{5} < x < \frac{-1+\sqrt{6}}{5} \right]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left[-\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3} \right]$$

$$\left[x \leq -\frac{1}{2}; x > \frac{2}{3} \right]$$

$$\left[x < \frac{4}{3}; x > 2 \right]$$

$$\left[\frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3} \right]$$

$$[-\infty < x < 1; 2 < x < +\infty]$$

$$\left[-\infty < x < \frac{3}{2}; 4 < x < +\infty \right]$$

$$\left[\frac{5}{2} < x < 3 \right]$$

$$[2 < x < 4]$$

$$\left[-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{3}; x > 2 \right]$$

$$\left[-2 < x < -\frac{1}{2}; 1 < x < 2 \right]$$

$$[0 < x < 4]$$

$$[-3 < x < +3]$$

$$\left[-\frac{5}{2} < x < \frac{2}{3}; x \geq \frac{51}{10} \right]$$

$$[-\infty < x < -3; 3 < x < +\infty]$$

$$\left[-1-\sqrt{6} < x < -1+\sqrt{6}; 2 < x < 4 \right]$$

$$[-\infty < x < -3; 0 \leq x \leq 1; 3 < x < +\infty]$$

$$\left[\frac{1}{3} < x < +\infty; \{0\} \right]$$

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^2-x}$$

$$\frac{x-2\sqrt{2}}{4x-\sqrt{5}} < 0$$

$$\frac{x+2}{x-3} < 1$$

$$\frac{4x-2}{x-5} \geq 2$$

$$\frac{3}{x-2} \leq \frac{2}{2x-3}$$

$$\frac{x}{x-3} - \frac{4}{x-2} \geq 1$$

$$\frac{(2x+1)^2(x-3)}{(2x+1)(x-4)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{2x+1}{4x^2-9} - \frac{x}{2x+3} < \frac{x-3}{2x-3}$$

$$\frac{4x-x^2}{9x^2+6x+1} \geq 0$$

$$\frac{x^3-3x^2}{x^2-5x+7} < 0$$

$$\frac{x^2+2x+4}{3-x^2} < 0$$

$$\frac{2x^2-5x+2}{3x} > 0$$

$$\frac{x^2-3\sqrt{2}x+4}{x-2} < 0$$

$$\frac{x^2-2}{2x-3} \geq 1$$

$$\frac{x^2+3x}{x^2-3x-4} > 0$$

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-6x+5} < 0$$

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x} > 0$$

$$\frac{3x^2-4x+1}{3x^2-10x-8} \geq 0$$

$$\frac{2x^2-10x+5}{(x-1)(2x-1)} > 0$$

$$\frac{2(x+1)^2+1}{x^3-1} + \frac{x}{x^2+x+1} - \frac{2}{x-1} > 0$$

$$[x < 0; 0 < x < 1; x \neq 0]$$

$$\left[\frac{\sqrt{5}}{4} < x < 2\sqrt{2} \right]$$

$$[x < 3]$$

$$[x \leq -4; x > 5]$$

$$\left[-\frac{1}{2} < x < 1; x > 4 \right]$$

$$[x < 2; 3 < x \leq 6]$$

$$\left[x < -\frac{1}{2}; 2 < x \leq 3; x > 4 \right]$$

$$\left[x < -\frac{3}{2}; \frac{4-\sqrt{14}}{4} < x < \frac{3}{2}; x > \frac{4+\sqrt{14}}{4} \right]$$

$$[0 \leq x \leq 4]$$

$$[-\infty < x < 0; 0 < x < 3]$$

$$[-\infty < x < -\sqrt{3}; \sqrt{3} < x < +\infty]$$

$$\left[0 < x < \frac{1}{2}; 2 < x < +\infty \right]$$

$$[-\infty < x < \sqrt{2}; 2 < x < 2\sqrt{2}]$$

$$\left[\{x=1\}; \frac{3}{2} < x < +\infty \right]$$

$$[-\infty < x < -3; -1 < x < 0; 4 < x < +\infty]$$

$$[-2 < x < 1; 3 < x < 5]$$

$$[-2 < x < 0]$$

$$\left[-\infty < x < -\frac{2}{3}; \frac{1}{3} \leq x \leq 1; 4 < x < +\infty \right]$$

$$\left[-\infty < x < \frac{1}{2}; \frac{5-\sqrt{15}}{2} < x < 1; \frac{5+\sqrt{15}}{2} < x < +\infty \right]$$

$$[1 < x < +\infty]$$

Sistemi di disequazioni razionali intere di primo grado.

$$\begin{cases} 11-2x > 5+x \\ 3(4-2x) < 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+x < 6-2x \\ 2(4-x) < 9 \end{cases}$$

$$\left[\frac{1}{3} < x < 2 \right]$$

$$\left[-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{3} \right]$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3} > \frac{3x-1}{2} + \frac{1}{3} \\ 2x-3 > \frac{x-8}{3} \end{cases} \quad \left[\frac{1}{5} < x < 1 \right]$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{6} - \frac{4}{3} > \frac{2(x-4)}{5} \\ \frac{2x-1}{12} - \frac{1}{3} - \frac{x-4}{6} < \frac{2-x}{3} \end{cases} \quad \left[-1 < x < \frac{5}{4} \right]$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{x}{2} < 5 - \frac{3}{2}x \\ \frac{5-x}{6} < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{[Nessuna soluzione]}$$

$$\begin{cases} 4x-7 < 2x-10 \\ \frac{6x+4}{3} < x+2 \\ \frac{3x-2}{4} < \frac{x}{2} + 6 \end{cases} \quad \left[x < -\frac{3}{2} \right]$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - 1 + x > \frac{x}{4} \\ x - \frac{1}{3}x < \frac{3-x}{2} \\ \frac{x}{2} < 1 + \frac{x}{4} \end{cases} \quad \left[\frac{4}{9} < x < \frac{9}{7} \right]$$

$$\begin{cases} \frac{x+3}{2} - \frac{x}{3} < \frac{1}{2}(6-x) \\ \frac{x+1}{2} - \frac{1}{3} < \frac{1}{6}(x-1) \\ \frac{x-1}{4} + \frac{x-2}{3} < \frac{6-x}{4} \end{cases} \quad [x < -1]$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} - \frac{4-3x}{12} > 0 \\ 7-x-2(x-4) < 3(x+5)-x \end{cases} \quad \left[\frac{8}{7} < x < +\infty \right]$$

$$\begin{cases} x+2 - \frac{x-7}{3} + 5x < 4 \\ \frac{2-x}{4} + 3x < \frac{x}{2} - 5 \end{cases} \quad \left[-\infty < x < -\frac{22}{9} \right]$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(1-2x) + \frac{5}{6} > -2x \\ 14x-5(x-2) < -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \left[-\infty < x < -\frac{7}{6} \right]$$

$$\begin{cases} \frac{3-4x}{2} - (x-1)^2 < (1-x)(1+x) \\ 7+4x^2 - \frac{2x+1}{3} < (2x+1)^2 \\ \frac{x-2}{4} - \frac{x}{2} < 5-2x \end{cases} \quad \left[\frac{17}{14} < x < \frac{22}{7} \right]$$

$$\begin{cases} 3 - \frac{4-x}{3} + 5\frac{3-x}{2} < 1 \\ 3 - x < 4(x-2) + \frac{3}{4}x \\ 15x - 4(x+2) > \frac{3+x}{2} \end{cases} \quad \left[\frac{49}{13} < x < +\infty \right]$$

Sistemi di disequazioni razionali intere di grado superiore al primo.

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases} \quad [2 < x < 4]$$

$$\begin{cases} x^2 - x - \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \\ x^2 < \frac{5}{2}x \\ x^2 > \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases} \quad [0 < x < 1]$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 > 0 \\ x^2 + 5 \geq \frac{9}{2}x \\ x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \left[x \leq \frac{1}{2}; x \geq \frac{5}{2} \right]$$

$$\begin{cases} x(x-2) - x^2 + 4 < 3(x-2)(x-3) \\ x^2 - 4x - (3-2x)^2 < 5 - 4(x-1)^2 \end{cases} \quad \left[-\sqrt{10} < x < 2; \frac{7}{3} < x < +\sqrt{10} \right]$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{4} - \frac{x(x-2)}{3} - 3x(1-x) < (x+2)^2 \\ 7(x+2)^2 + 4(x+1)^2 < 32 \end{cases} \quad \left[-\frac{3}{5} < x < 0 \right]$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - 4x(x-1) + (2x+1)^2 < 4 \\ \frac{x-1}{2} - x(x+3) > x^2 - x \end{cases} \quad [\text{Nessuna soluzione}]$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 4}{3-x} \geq 2 \\ \frac{7-x}{2} - x^2 - 4 < 0 \end{cases} \quad \left[-\infty < x \leq 1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3} \leq x < 3 \right]$$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-2} < 1 \\ 4x^2 - 1 > 2x + 1 \end{cases} \quad \left[-\infty < x < -\frac{1}{2}; 1 < x < 2 \right]$$

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - x + 1 \leq 0 \\ x^2 + 2x - 24 \geq 0 \end{cases} \quad [-\infty < x \leq -6]$$

$$\begin{cases} x^2 + (2 - \sqrt{3})x - 2\sqrt{3} \leq 0 \\ (x^3 + 1)(x^2 - 5) > 0 \end{cases} \quad [-2 \leq x < -1]$$

Disequazioni irrazionali.

$$\sqrt{x^2 + x + 1} < 4$$

$$\sqrt{x^2 - 5} \leq 2$$

$$\sqrt{x^2 + 2x} \geq 3$$

$$2x - 3 < \sqrt{x - 1}$$

$$x - 1 - \sqrt{x + 1} > 0$$

$$x + 1 < \sqrt{2x - 5}$$

$$\sqrt{x + 4} - 2x + 5 < 0$$

$$x + 7 \leq \sqrt{9 - x^2}$$

$$\sqrt{2x + 4} \geq x$$

$$\sqrt{6x - x^2} < 3 - 2x$$

$$\sqrt{x^2 - 4} - 2x + 1 > 4 - x$$

$$\frac{\sqrt{x}}{x + 1} > 0$$

$$\frac{\sqrt{x + 1}}{x^2 - x} < 0$$

$$\frac{3 - x}{\sqrt{x}} > 0$$

$$\sqrt[3]{x^3 - 2x} \geq 1$$

$$\sqrt[3]{x^3 - 1} < x + 3$$

$$\sqrt[3]{x^3 + 2x} \geq 4 + x$$

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} > 3$$

$$\sqrt{24 + 2x - x^2} > 2 - x$$

$$\sqrt{x + 3} < x - 3$$

$$\sqrt{2x - 4} + \sqrt{x + 3} < \sqrt{3x + 1}$$

$$\frac{\sqrt{x + 1}}{3 - x - \sqrt{x}} < 0$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + 3}} \geq 0$$

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} > 3$$

$$\frac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x} \geq 1$$

$$\left[\frac{-1 - \sqrt{61}}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{61}}{2} \right]$$

$$[-3 \leq x \leq -\sqrt{5}; \sqrt{5} \leq x \leq 3]$$

$$[-\infty < x \leq -1 - \sqrt{10}; -1 + \sqrt{10} \leq x < +\infty]$$

$$[1 \leq x < 2]$$

$$[3 < x < +\infty]$$

[Nessuna soluzione]

$$\left[\frac{21 + \sqrt{105}}{8} < x < +\infty \right]$$

[Nessuna soluzione]

$$[-2 \leq x \leq 1 + \sqrt{5}]$$

$$\left[0 \leq x < \frac{3}{5} \right]$$

$$\left[-\infty < x < -\frac{13}{6} \right]$$

$$[0 < x < +\infty]$$

$$[0 < x < 1]$$

$$[0 < x < 3]$$

$$\left[-1 \leq x \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \leq x < +\infty \right]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

[Nessuna soluzione]

$$\left[1 < x < \frac{3}{\sqrt{5}} \right]$$

$$[-2 \leq x < 6]$$

$$[x > 6]$$

$$\left[2 \leq x < \frac{-1 + 3\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\left[\frac{7 - \sqrt{13}}{2} < x < +\infty \right]$$

$$[\{x = 0\}, 4 \leq x < +\infty]$$

$$\left[1 < x < \frac{3}{\sqrt{5}} \right]$$

$$\left[\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \leq x < 1 \right]$$